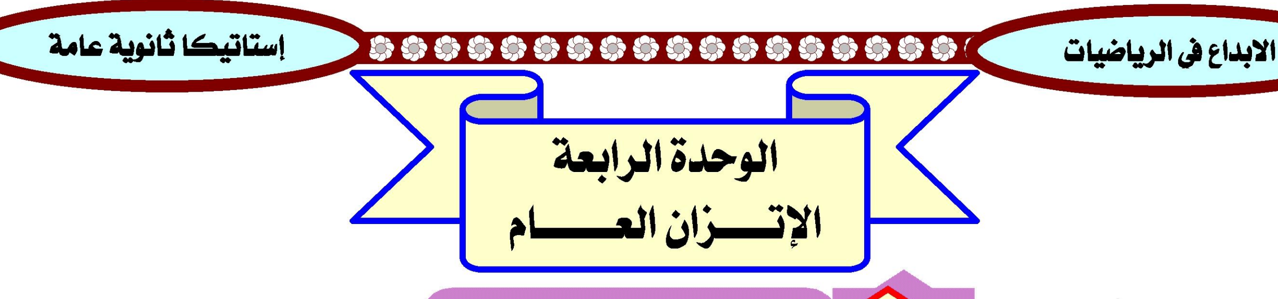


٤ - ١ إتزان جسم جاسئ

تعريف :

يكون الجسم الواقع تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية فى حالة إتزان استاتيكى إذا كان مجموع القوى يساوى صفر وتوازنت عزوم الدوران المؤثرة على جسم فى اتجاه دوران عقارب الساعة مع عزوم الدوران فى عكس إتجاه دوران عقارب الساعة.

ومن ذلك نـجد أن:

الشروط الكافيه واللازمة لاتزان مجموعة من القوى المستوية هى:

(١) أن ينعدم متجه محصلة القوى ($\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{٠}$)

(٢) أن ينعدم مجموع عزوم القوى بالنسبة لنقطة واحدة ($\overleftarrow{جـ} = \overleftarrow{٠}$)

ويمكن صياغة هذه الشروط بصورة مكافئة كمايلى:

لكى تتوازن مجموعة من القوى يلزم ويكفى أن تتحقق الشروط التالية:

١) ينعدم مجموع المركبات الجبرية للقوى فى إتجاهين متعامدين واقعين فى مستويها.

٢) ينعدم مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة لنقطة واحدة فى مستويها.

والتعبير الرياضى عن هذه الشروط هو:

$$س = ٠ \quad ، \quad ص = ٠ \quad ، \quad جـ = ٠$$

أى أن :

١) المجموع الجبرى لمركبات القوى فى إتجاه محور السينات يساوى صفر

٢) المجموع الجبرى لمركبات القوى فى إتجاه محور الصادات يساوى صفر

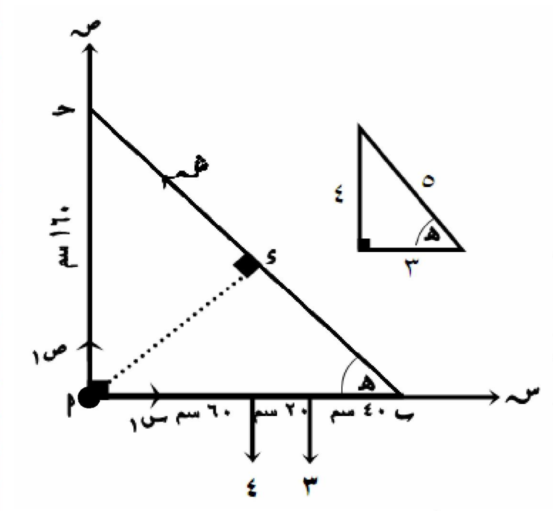
٣) المجموع الجبرى لعزوم القوى حول أى نقطة فى المستوى يساوى صفر

وبتطبيق هذه الشروط نحصل على ثلاث معادلات فى ثلاث مجاهيل وبحل المعادلات الثلاثة نحصل على قيم هذه المجاهيل وسوف يتضح ذلك من خلال الأمثلة التالية:

مثــال:

قضيب منتظم أب طوله ١٢٠سم ووزنه ٤ ث.كجم يؤثر فى منتصفه يتصل طرفه أ بمفصل مثبت فى حائط رأسى ، علق ثقل قدره ٣ ث.كجم فى نقطة من القضيب على بعد ٨٠ سم من أ وحفظ القضيب فى وضع أفقى بواسطة حبل يتصل أحد طرفيه بالطرف ب للقضيب ويتصل طرفه الآخر بنقطة على الحائط تبعد ١٦٠ سم رأسياً أعلى أ اوجد الشد فى الخيط ورد فعل المفصل.

الحــل:



$\because$ القضيب متزن تحت تأثير القوى الآتيه:

- وزن القضيب ٤ ث.كجم رأسيا لأسفل
- الثقل ٣ نيوتن رأسيا لأسفل
- قوة الشد فى الخيط وتميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ
  لذلك نحللها الى مركبتين فى إتجاهين متعامدين
- قوة رد فعل المفصل وهى مجهولة الإتجاه

لذلك نضع بدلامنها مركبتين متعامدتين $س_1$ ، $ص_1$

بتطبيق شروط الإتزان وهى: س = ٠ ، ص = ٠ ، جـ = ٠

$\therefore$ س = ٠ $\Leftarrow$ $\therefore$ $س_1$ = شـ جتاهـ $\Leftarrow$ $\therefore$ $س_1 = \frac{٣}{٥}$ شـ (١)

$\therefore$ ص = ٠ $\Leftarrow$ $\therefore$ $ص_1$ + شـ جاهـ = ٣ + ٤ $\Leftarrow$ $\therefore$ $ص_1 + \frac{٤}{٥}$ شـ = ٧ (٢)

$\therefore$ $جـ_{أ}$ = ٠ $\Leftarrow$ $\therefore$ شـ × أء − ٤ × ٦٠ − ٣ × ٨٠ = ٠ حيث أء = $\frac{١٢٠ \times ١٦٠}{٢٠٠}$ = ٩٦ سم

$\therefore$ شـ × ٩٦ − ٢٤٠ − ٢٤٠ = ٠ $\Leftarrow$ $\therefore$ شـ = $\frac{٤٨٠}{٩٦}$ = ٥ ث.كجم

بالتعويض فى (١) ، (٢)

$\therefore$ $س_1 = \frac{٣}{٥} \times ٥$ = ٣ ث.كجم ، $\therefore$ $ص_1 + \frac{٤}{٥} \times ٥ = ٧$ $\Leftarrow$ $\therefore$ $ص_1$ = ٧ − ٤ = ٣ ث.كجم

$\therefore$ $ر = \sqrt{س_1^2 + ص_1^2} = \sqrt{٣^2 + ٣^2} = \sqrt{٩ + ٩} = ٣\sqrt{٢}$ ث.كجم

، ظال = $\frac{ص_1}{س_1} = \frac{٣}{٣} = ١$ $\Leftarrow$ $\therefore$ ل = ٤٥°

أى أن مقدار رد فعل المفصل = $٣\sqrt{٢}$ ث.كجم ويصنع زاوية ٤٥° مع الأفقى

مثـــال:

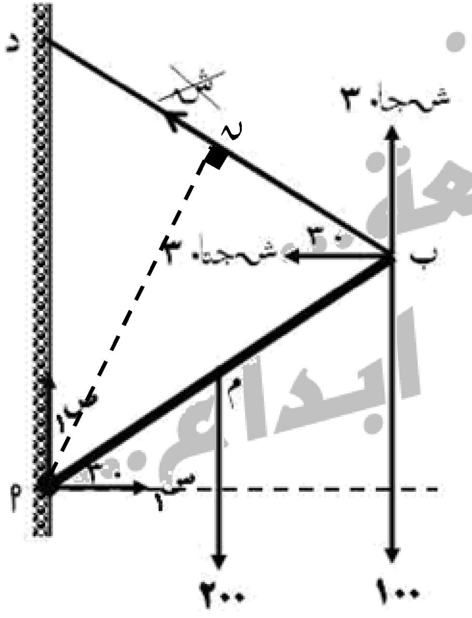
$أب$ قضيب منتظم وزنه ٢٠٠ نيوتن يتصل طرفه $أ$ بمفصل مثبت فى حائط راسى ويحمل عند طرفه $ب$ ثقلا قدره ١٠٠نيوتن.حفظ القضيب فى وضع يميل فيه على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها 30° بواسطة حبل مساو للقضيب فى الطول يتصل أحد طرفيه بالطرف $ب$ للقضيب ويتصل طرفه الآخر بنقطة $د$ من الحائط تقع رأسيا أعلى $أ$ وعلى بعد منها يساوى طول القضيب .أوجد مقدار الشد فى الحبل وقوة رد فعل المفصل.

الحـــل:

∵ طول القضيب = طول الخيط = بعد نقطة التعليق عن $أ$

∴ المثلث $أبد$ متساوى الأضلاع ∴ $أب = بد = أد = ل$

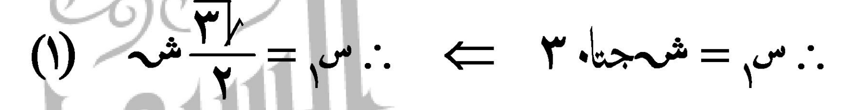
$$∴ أهـ = ل جا ٦٠ = \frac{\sqrt{3}}{2} ل$$



∵ القضيب متزن تحت تأثير القوى الآتية:

- وزن القضيب ٢٠٠ نيوتن ويؤثر فى منتصفه رأسيا لأسفل
- وزن قدره ١٠٠ نيوتن ويؤثر عند نقطة ب رأسيا لأسفل
- قوة الشد فى الخيط وتميل على الأفقى بزاوية قياسها 30°
  لذلك نحللها الى مركبتين فى إتجاهين متعامدتين
- قوة رد فعل المفصل وهى مجهولة الإتجاه
  لذلك نضع بدلامنها مركبتين متعامدتين $س_1$ ، $ص_1$

بتطبيق شروط الإتزان وهى: س = ٠، ص = ٠، جـ = ٠



$$∴ س_1 = ش جتا ٣٠ \quad ⇐ \quad ∴ س_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} ش \quad (1)$$

$$∴ ص_1 + ش جا ٣٠ = ٣٠٠ \quad ⇐ \quad ∴ ص_1 + \frac{1}{2} ش = ٣٠٠ \quad (2)$$

$$∴ جـ_أ = ٠ \quad ⇐ \quad ∴ ش × أهـ - ١٠٠ × أب جتا ٣٠ - ٢٠٠ × أم جتا ٣٠ = ٠$$

$$∴ ش × \frac{\sqrt{3}}{2} ل - ١٠٠ × ل × \frac{\sqrt{3}}{2} - ٢٠٠ × \frac{1}{2} ل × \frac{\sqrt{3}}{2} = ٠$$

$$∴ ش - ١٠٠ - ١٠٠ = ٠ \quad ⇐ \quad ∴ ش = ٢٠٠ \text{ نيوتن}$$

بالتعويض فى (١) ، (٢) $∴ س_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} × ٢٠٠ = ١٠٠\sqrt{3}$ نيوتن

، $∴ ص_1 + \frac{1}{2} × ٢٠٠ = ٣٠٠ \quad ⇐ \quad ∴ ص_1 = ٢٠٠$ نيوتن

$\therefore ر = \sqrt{س_1^2 + ص_1^2} = \sqrt{(١٠٠\sqrt{٣})^2 + (٢٠٠)^2} = ١٠٠\sqrt{٧}$ نيوتن

، $ظا ل = \frac{ص_1}{س_1} = \frac{٢٠٠}{١٠٠\sqrt{٣}} = \frac{٢}{\sqrt{٣}} = \frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$

أى أن : الشد فى الخيط = ٢٠٠ نيوتن

ومقدار رد فعل المفصل = $١٠٠\sqrt{٧}$ ث.كجم ويصنع زاوية ظلها $\frac{٢\sqrt{٣}}{٣}$ مع الأفقى

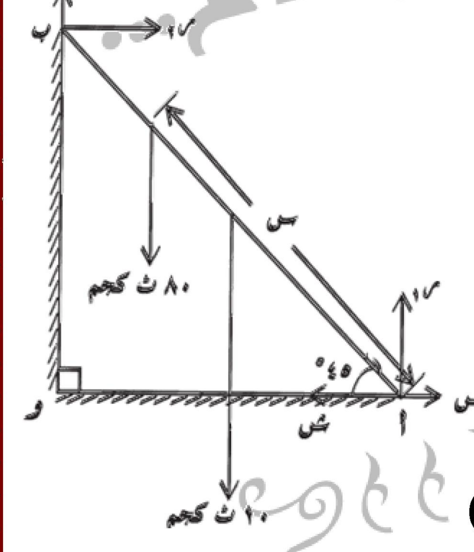
مثـــال:

يرتكز سلم منتظم وزنه ١٠ ث.كجم بطرفه أ على مستوى افقى أملس وبطرفه ب على حائط رأسى أملس حفظ السلم فى مستوى رأسى وفى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° بواسطة حبل أفقى يصل الطرف أ بنقطة من المستوى الأفقى تقع رأسيا أسفل ب يصعد رجل وزنه ٨٠ ث.كجم هذا السلم أوجد:

اولا: قوة الشد فى الحبل عندما يكون الرجل قد صعد $\frac{٣}{٤}$ طول السلم

ثانيا: أقصى قيمة للشد يتحملها هذا الحبل إذا علم أنه كان على وشك الأنقطاع عندما وصل الرجل الى قمة السلم.

الحـــل:



السلم متزن تحت تأثير القوى الآتية:

- وزن السلم ١٠ ث.كجم ويؤثر فى منتصفه رأسيا لأسفل
- وزن الرجل ٨٠ ث.كجم رأسيا لأسفل



- رد فعل المستوى الأفقى $ر_1$ وهو عموديا عليه لأن المستوى أملس
- رد فعل المستوى الرأسى $ر_2$ وهو عموديا عليه لأن المستوى أملس
- الشد فى الحبل ش

نفرض أن طول السلم ل وأن الرجل صعد مسافة س على السلم

بتطبيق شروط الإتزان وهى: س = ٠ ، ص = ٠ ، جـ = ٠

$\therefore س = ٠ \quad \Leftarrow \quad \therefore ر_2 - ش = ٠ \quad \Leftarrow \quad \therefore ر_2 = ش \quad (١)$

$\therefore جـ = ٠ \quad \therefore -ر_2 \times ل جا ٤٥° + ١٠ \times \frac{١}{٢} ل جتا ٤٥° + ٨٠ \times س جتا ٤٥° = ٠$

$\therefore -ر_2 \times ل \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + ١٠ \times \frac{١}{٢} ل \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + ٨٠ \times س \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = ٠$

$\therefore ر_2 ل = ٥ل + ٨٠س \quad \Leftarrow \quad \therefore ر_2 = ٥ + ٨٠ \times \frac{س}{ل}$ بالتعويض من (١)

$\therefore$ ش $= ٥ + ٨٠ \times \frac{\text{س}}{\text{ل}}$ (٢)

أولا: عندما يصعد الرجل $\frac{٣}{٤}$ طول السلم أى أن س $= \frac{٣}{٤}$ ل وبالتعويض فى (٢)

$\therefore$ ش $= ٥ + ٨٠ \times \frac{٣}{٤} = ٦٥$ ث.كجم

ثانيا: أقصى قيمة للشد عندما يكون الرجل عند قمة السلم أى أن س = ل وبالتعويض فى (٢)

$\therefore$ ش $= ٥ + ٨٠ \times ١ = ٨٥$ ث.كجم

مثـــال:

أب ساق منتظمة وزنها ٥ ث.كجم وطولها ٣٠ سم ترتكز بطرفها أ على أرض افقية خشنة وترتكز عند إحدى نقطها جـ على وتد أملس يعلو عن سطح الأرض بمقدار ١٢,٥ سم فإذا كانت الساق على وشك الإنزلاق عندما كانت تميل على الأرض الأفقية بزاوية قياسها ٣٠° أوجد:

اولا: مقدار قوة رد فعل الوتد ثانيا: معامل الإحتكاك بين الطرف أ والأرض.

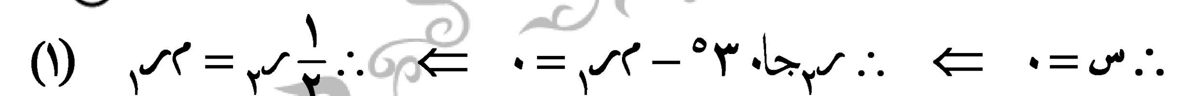
الحـــل:

الساق متزنه تحت تأثير القوى الآتيه:

- وزن الساق ٥ ث.كجم ويؤثر فى منتصفها رأسيا لأسفل
- رد الفعل العمودى للمستوى الأفقى $ر_١$
- قوة الإحتكاك النهائى $م ر_١$ (لأن الساق على وشك الإنزلاق)
- رد فعل الوتد $ر_٢$ وهو عموديا عليه لأن الوتد أملس

وبرغم أن رد فعل الوتد معلوم الإتجاه الا أنه سيتم تحليله الى مركبتين فى الإتجاهين الأفقى والرأسى

بتطبيق شروط الإتزان وهى: س = ٠ ، ص = ٠ ، ج = ٠



$\therefore$ س $= ٠ \Leftarrow \therefore ر_٢ \text{جا} ٣٠^\circ - م ر_١ = ٠ \Leftarrow \therefore \frac{١}{٢} ر_٢ = م ر_١$ (١)

، $\therefore$ ص $= ٠ \Leftarrow \therefore ر_٢ \text{جتا} ٣٠^\circ + ر_١ - ٥ = ٠ \Leftarrow \therefore \frac{\sqrt{٣}}{٢} ر_٢ + ر_١ = ٥$ (٢)

، $\therefore ج_أ = ٠ \Leftarrow \therefore ٥ \times ١٥ \text{جتا} ٣٠^\circ - ر_٢ \times ٢٥ = ٠ \Leftarrow \therefore ر_٢ = \frac{٣\sqrt{٣}}{٢}$ ث.كجم

بالتعويض فى (٢) عن قيمة $ر_٢$

$\therefore \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} + ر_١ = ٥ \Leftarrow \therefore ر_١ = ٥ - \frac{٩}{٤} = \frac{١١}{٤}$ ث.كجم

بالتعويض فى (١) عن قيمتى $ر_١$ ، $ر_٢$

$$\therefore \frac{١}{٢} \times \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} = م \times \frac{١١}{٤} \quad \Leftarrow \quad \therefore م = \frac{٣\sqrt{٣}}{١١} \quad \#$$

مثـــال:

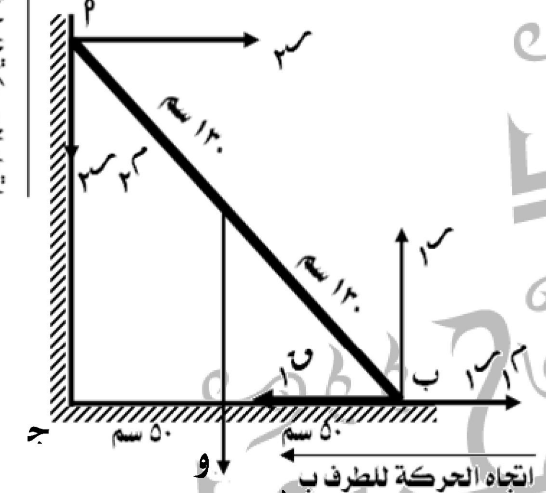
أب قضيب منتظم وزنه ٤٣ نيوتن وطوله ٢٦٠ سم يرتكز بطرفه أ على حائط رأسى وبطرفه ب على أرض افقية بحيث كان القضيب فى مستوى رأسى فإذا كان معاملا الإحتكاك بين القضيب وكل من الأرض والحائط هما $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ على الترتيب وكان الطرف ب يبعد عن الحائط مسافة ١٠٠ سم. أوجد مقدار القوة الأفقية التى إذا أثرت فى الطرف ب جعلت القضيب على وشك الحركة:

اولا: نحو الحائط ثانيا: بعيدا عن الحائط.

الحـــل:

القضيب متزن تحت تأثير القوى الآتيه:

- وزن القضيب ٤٣ نيوتن ويؤثر فى منتصفه رأسيا لأسفل
- رد الفعل العمودى للمستوى الأفقى $ر_١$
- رد الفعل العمودى للمستوى الرأسى $ر_٢$
- قوة الإحتكاك النهائى للمستوى الأفقى $م_١ ر_١$
- قوة الإحتكاك النهائى للمستوى الرأسى $م_٢ ر_٢$
- القوة الأفقية المؤثرة ق



اولا: القضيب على وشك الحركة نحو الحائط:

نفرض ان القوة المطلوبه هى $ق_١$ وإتجاهها نحو الحائط

∵ الطرف ب سيتحرك نحو الحائط

∴ قوة الاحتكاك $م_١ ر_١$ يكون اتجاهها بعيدا عن الحائط

∵ الطرف أ سيتحرك رأسيا لأعلى

∴ قوة الاحتكاك $م_٢ ر_٢$ يكون اتجاهها رأسيا لأسفل

بتطبيق شروط الإتزان وهى: س = ٠ ، ص = ٠ ، ج = ٠

$$\therefore س = ٠ \quad \Leftarrow \quad \therefore ر_٢ + م_١ ر_١ - ق_١ = ٠ \quad \Leftarrow \quad \therefore ق_١ = ر_٢ + \frac{١}{٢} ر_١ \quad (١)$$

$$\therefore ص = ٠ \quad \Leftarrow \quad \therefore ر_١ - م_٢ ر_٢ - و = ٠ \quad \Leftarrow \quad \therefore ر_١ - \frac{١}{٤} ر_٢ = ٤٣ \quad (٢)$$

$$\therefore ج_ب = ٠ \quad \Leftarrow \quad \therefore - ر_٢ \times أج + م_٢ ر_٢ \times بج + ٤٣ \times ٥٠ = ٠$$

$\therefore -ر_٢ \times ٢٤٠ + \frac{١}{٤} ر_٢ \times ١٠٠ + ٢١٥٠ = ٠ \quad \Leftarrow \quad \therefore ر_٢ = ١٠$ نيوتن

بالتعويض فى (٢) عن قيمة $ر_٢$

$\therefore ر_١ - \frac{١}{٤} \times ١٠ = ٤٣ \quad \Leftarrow \quad \therefore ر_١ - ٢{,}٥ = ٤٣ \quad \Leftarrow \quad \therefore ر_١ = ٤٥{,}٥$ نيوتن

بالتعويض فى (١) عن قيمتى $ر_١$ ، $ر_٢$

$\therefore ق_١ = ١٠ + \frac{١}{٢} \times ٤٥{,}٥ \quad \Leftarrow \quad \therefore ق_١ = ٣٢{,}٧٥$ نيوتن #

ثانيا: القضيب على وشك الحركة بعيدا عن الحائط:

نفرض ان القوة المطلوبه هى $ق_٢$ وإتجاهها بعيدا عن الحائط

$\because$ الطرف ب سيتحرك بعيدا عن الحائط

$\therefore$ قوة الاحتكاك $م_١ ر_١$ يكون اتجاهها نحو الحائط

$\because$ الطرف أ سيتحرك رأسيا لأسفل

$\therefore$ قوة الاحتكاك $م_٢ ر_٢$ يكون اتجاهها رأسيا لأعلى

بتطبيق شروط الإتزان وهى: س = ٠ ، ص = ٠ ، ج = ٠

$\therefore س = ٠ \quad \Leftarrow \quad \therefore ق_٢ + ر_٢ - م_١ ر_١ = ٠ \quad \Leftarrow \quad \therefore ق_٢ = \frac{١}{٢} ر_١ - ر_٢$ (١)

، $\therefore ص = ٠ \quad \Leftarrow \quad \therefore ر_١ + م_٢ ر_٢ - ٤٣ = ٠ \quad \Leftarrow \quad \therefore ر_١ + \frac{١}{٤} ر_٢ = ٤٣$ (٢)

، $\therefore ج_ب = ٠ \quad \Leftarrow \quad \therefore -ر_٢ \times أجـ - م_٢ ر_٢ \times بجـ + ٤٣ \times ٥٠ = ٠$

$\therefore -ر_٢ \times ٢٤٠ - \frac{١}{٤} ر_٢ \times ١٠٠ + ٢١٥٠ = ٠ \quad \Leftarrow \quad \therefore ر_٢ \simeq ٨$ نيوتن

بالتعويض فى (٢) عن قيمة $ر_٢$

$\therefore ر_١ + \frac{١}{٤} \times ٨ = ٤٣ \quad \Leftarrow \quad \therefore ر_١ + ٢ = ٥٠ \quad \Leftarrow \quad \therefore ر_١ = ٤٨$ نيوتن

بالتعويض فى (١) عن قيمتى $ر_١$ ، $ر_٢$

$\therefore ق_٢ = \frac{١}{٢} \times ٤٨ - ٨ \quad \Leftarrow \quad \therefore ق_١ = ١٦$ نيوتن #

مثـــال:

أب قضيب منتظم طوله ١٦٠سم ووزنه ٣٠٠ ث.جم علق في مسمار ثابت جـ بواسطة خيطين مربوطين في طرفيه أ ، ب وعلق في إحد نقطة ى ثقل مقداره ٦٠٠ ث.جم فإذا كان القضيب يتزن في وضع أفقي

والخيطان أجـ ، بجـ يميلان على القضيب بزاويتين قياسهما ٦٠ ، ٣٠ على الترتيب أوجد طول أن ومقدار الشد في الخيطين.

الحـــل:

$\because$ **القضيب متزن تحت تأثير القوى الآتية:**

- **وزن القضيب ٣٠٠ ث.جم ويؤثر فى منتصفه رأسيا لأسفل**
- **الثقل ٦٠٠ ث.جم عند نقطة ن**
- **قوة الشد ش$_1$ فى الخيط أجـ**
- **قوة الشد ش$_2$ فى الخيط بجـ**

بتحليل ش$_1$ ، ش$_2$ فى الاتجاهين الأفقى والرأسى

بتطبيق شروط الإتزان وهى: س = ٠ ، ص = ٠ ، ج = ٠

$\therefore$ ش$_1$ جتا ٣٠° = ش$_2$ جتا ٦٠°

$\therefore$ ش$_1$ = $\sqrt{3}$ ش$_2$ (١)

$\therefore$ ش$_1$ جا ٦٠° + ش$_2$ جا ٣٠° = ٩٠٠

$\therefore$ $\sqrt{3}$ ش$_1$ + ش$_2$ = ١٨٠٠ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢)

$\therefore$ $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ ش$_2$ + ش$_2$ = ١٨٠٠ $\Leftarrow$ $\therefore$ ٤ش$_2$ = ١٨٠٠

$\therefore$ ش$_2$ = ٤٥٠ ث.جم $\Leftarrow$ $\therefore$ ش$_1$ = ٤٥٠$\sqrt{3}$ ث.جم #

$\therefore$ ج$_م$ = ٠ $\Leftarrow$ $\therefore$ ش$_2$ جا ٣٠° × ١٦٠ − ٣٠٠ × ٨٠ − ٦٠٠ × أن = ٠

$\therefore$ ٤٥٠ × $\frac{1}{2}$ × ١٦٠ − ٣٠٠ × ٨٠ − ٦٠٠ × أن = ٠ $\Leftarrow$ ٦٠٠ أن = ١٢٠٠٠

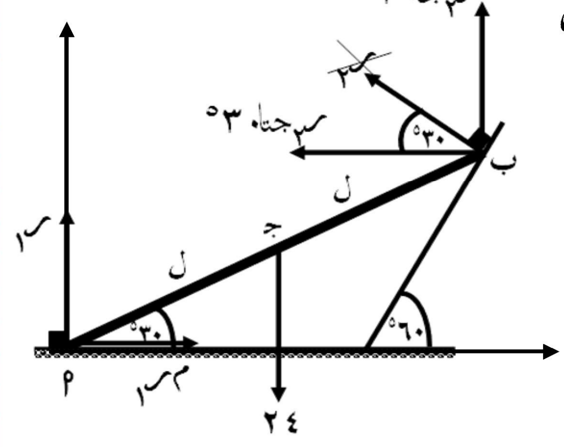
$\therefore$ أن = $\frac{12000}{600}$ $\Leftarrow$ $\therefore$ أن = ٢٠ سم #

مثـــال:

يرتكز قضيب منتظم وزنه ٢٤ ث.كجم بأحد طرفيه على أرض أفقية وبطرفه الآخر على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° إذا كان القضيب على وشك الإنزلاق عندما كان قياس زاوية ميله على الأفقى ٣٠° ، فأوجد معامل الإحتكاك بين القضيب والأرض ورد فعل كل من المستوى والأرض

الحـــل:

القضيب متزن تحت تأثير القوى الآتيه:



- **وزن القضيب ٢٤ ث.كجم ويؤثر فى منتصفه رأسيا لأسفل**
- **رد الفعل العمودى للأرض ر١**
- **قوة الإحتكاك النهائى للأرض م ر١**
- **رد فعل المستوى المائل ر٢ وهو عموديا عليه**

لأن المستوى المائل أملس وبرغم أن رد الفعل معلوم الإتجاه الا أنه سيحلل الى مركبتين فى الإتجاهين الأفقى والرأسى

نفرض أن طول القضيب = ٢ل

بتطبيق شروط الإتزان وهى: س = ٠ ، ص = ٠ ، جـ = ٠

∴ م ر١ − ر٢ جتا ٣٠° = ٠ ⇐ ∴ م ر١ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ر٢ (١)

∴ ر١ + ر٢ جا ٣٠° − ٢٤ = ٠ ⇐ ∴ ر١ + $\frac{1}{2}$ ر٢ = ٢٤ (٢)

∴ جـم = ٠ ⇐ ∴ ر٢ جا ٣٠° × ٢ل جتا ٣٠° + ر٢ جتا ٣٠° × ٢ل جا ٣٠° + ٢٤ × ل جتا ٣٠° = ٠

∴ ر٢ × $\frac{1}{2}$ × ٢ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ + ر٢ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ × ٢ × $\frac{1}{2}$ − ٢٤ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = ٠

∴ ر٢ + ر٢ − ٢٤ = ٠ ⇐ ∴ ٢ر٢ = ٢٤ ⇐ ∴ ر٢ = ١٢ ث.كجم #

بالتعويض فى (٢)

∴ ر١ + $\frac{1}{2}$ × ١٢ = ٢٤ ⇐ ∴ ر١ = ٢٤ − ٦ = ١٨ ث.كجم

بالتعويض فى (١)

∴ م × ١٨ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ × ١٢ ⇐ ∴ ١٨م = ٦$\sqrt{3}$ ⇐ ∴ م = $\frac{6\sqrt{3}}{18} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ #

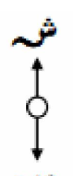
∴ رد فعل الأرض = ر = ر١ $\sqrt{1+\text{م}^2}$ = ١٨ $\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$ = ١٨ $\sqrt{1+\frac{1}{3}}$ = ١٢$\sqrt{3}$ ث.كجم

مثـــال:

أب قضيب منتظم طوله ٧٥ سم ووزنه ٤ ث.كجم يمكنه الحركة بسهولة حول مفصل عند طرفه أ ويمر داخل حلقة خفيفة ملساء مربوطة فى أحد طرفى خيط خفيف طوله ٣٢سم والطرف الآخر للخيط مثبت فى نقطة جـ تقع رأسيا أعلى أ وعلى بعد ٤٠ سم منها. أثبت أنه فى وضع الإتزان يكون الخيط عموديا على القضيب وأوجد الشد فيه ،وأن رد فعل المفصل يكون أفقيا وعين مقداره.

الحــــل:

الحلقة متزنة تحت تأثيرقوتى الشد فى الخيط وضغط القضيب عليها



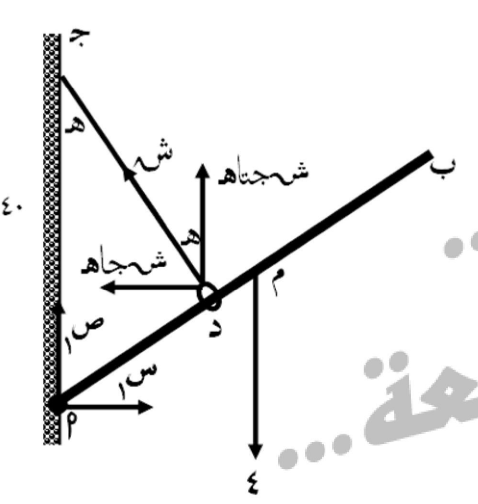
∵ الحلقة ملساء

∴ الضغط على الحلقة يكون عموديا على القضيب

∴ الشد فى الخيط يكون عموديا على القضيب

∴ جد ⊥ ؟ب ، ∵ ؟جـ = ٤٠ سم ، جد = ٣٢ سم

∴ ؟د = $\sqrt{(٤٠)^٢ - (٣٢)^٢}$ = ٢٤ سم



∵ القضيب متزن تحت تأثير القوى الآتية:

- وزن القضيب ٤ ث. كجم ويؤثر فى منتصفه رأسيا لأسفل
- قوة رد فعل المفصل وهى مجهولة الإتجاه

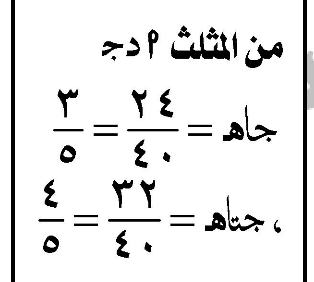
لذلك نضع بدلامنها مركبتين متعامدتين $س_١$ ، $ص_١$

- قوة الشد فى الخيط وتميل على الرأسى بزاوية قياسها هـ

وسيتم تحليلها الى مركبتين فى الإتجاهين الأفقى والرأسى



بتطبيق شروط الإتزان وهى: س = ٠ ، ص = ٠ ، جـ = ٠



من المثلث ؟ دجـ

جاهـ = $\frac{٢٤}{٤٠} = \frac{٣}{٥}$

، جتاهـ = $\frac{٣٢}{٤٠} = \frac{٤}{٥}$

∴ $س_١$ − ش جاهـ = ٠ ⟸ ∴ $س_١ = \frac{٣}{٥}$ ش (١)

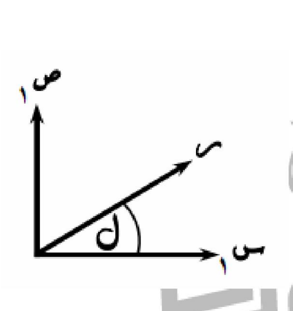
∴ ش جتاهـ + $ص_١$ − ٤ = ٠ ⟸ ∴ $ص_١ = ٤ - \frac{٤}{٥}$ ش (٢)

∴ $جـ_؟$ = ٠ ⟸ ∴ ش × ؟د − ٤ × ؟م جتاهـ = ٠

∴ ش × ٢٤ − ٤ × ٣٧,٥ × $\frac{٤}{٥}$ = ٠ ⟸ ∴ ش = $\frac{١٢٠}{٢٤}$ = ٥ ث.كجم

بالتعويض فى (١) ، (٢)

∴ $س_١ = \frac{٣}{٥} × ٥ = ٣$ ، ∴ $ص_١ = ٤ - \frac{٤}{٥} × ٥ = ٤ - ٤ = ٠$



∴ ر = $\sqrt{س_١^٢ + ص_١^٢} = \sqrt{٣^٢ + ٠^٢}$ = ٣ ث.كجم

، ظال = $\frac{ص_١}{س_١} = \frac{٠}{٣}$ = ٠ ⟸ ∴ ل = ٠°

أى أن رد فعل المفصل يكون أفقيا ومقداره = ٣ ث.كجم

مثـــــال:

يستند سلم منتظم بأحد طرفيه على حائط رأسى معامل الإحتكاك بينه وبين السلم يساوى $\frac{١}{٣}$ وبطرفه الآخر على أرض أفقية من نفس خشونة الحائط . فإذا إتزن السلم فى مستوى رأسى فى وضع يميل فيه السلم على الحائط بزاوية ظلها $\frac{٦}{١١}$ ، برهن على أن رجلا وزنه يساوى ثلاثة أمثال وزن السلم لا يمكنه الصعود أكثر من $\frac{٧}{١٠}$ طول السلم دون أن ينزلق السلم.

الحـــــل:

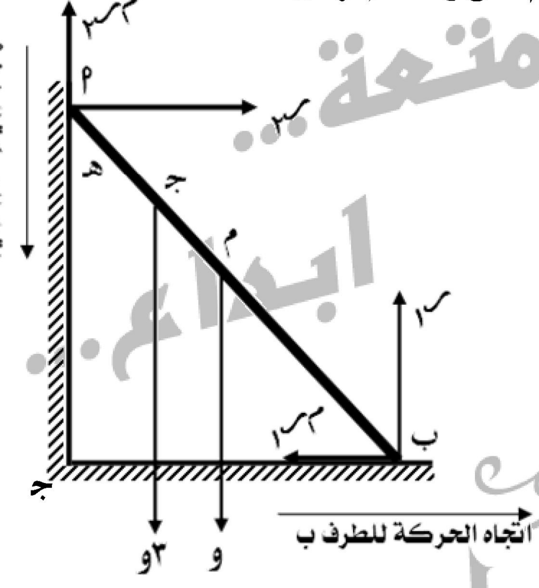
نفرض أن وزن القضيب (و) ث.كجم ووزن الرجل (٣و) ث.كجم

وأن طول السلم = ل $\quad \therefore$ أم = ب م = $\frac{١}{٢}$ ل

وأن الرجل صعد الى نقطة جـ حيث ب جـ = س واصبح السلم على وشك الإنزلاق

$\therefore$ الأحتكاك سيكون نهائى

$\therefore$ القضيب متزن تحت تأثير القوى الآتيه:



- وزن القضيب (و) ويؤثر فى منتصفه رأسيا لأسفل
- رد الفعل العمودى للمستوى الأفقى $ر_١$
- رد الفعل العمودى للمستوى الرأسى $ر_٢$
- قوة الإحتكاك النهائى للأرض م$ر_١$
- قوة الإحتكاك النهائى للحائط م$ر_٢$
- وزن الرجل (٣و) رأسيا لأسفل

بتطبيق شروط الإتزان وهى: س = ٠ ، ص = ٠ ، ج = ٠

$$\therefore ر_٢ - م ر_١ = ٠ \Leftarrow \therefore ر_٢ = \frac{١}{٣} ر_١ \Leftarrow \therefore ر_١ = ٣ ر_٢ \quad (١)$$

$$\therefore ر_١ + م ر_٢ - و - ٣و = ٠ \Leftarrow \therefore ر_١ + \frac{١}{٣} ر_٢ = ٤و \quad (٢)$$

بالتعويض من (١)

$$\therefore ٣ر_٢ + \frac{١}{٣} ر_٢ = ٤و \Leftarrow \therefore \frac{١٠}{٣} ر_٢ = ٤و$$

$$\therefore ر_٢ = ٤و \times \frac{٣}{١٠} = \frac{٦}{٥} و \quad (٣)$$

بأخذ العزوم حول ب $\quad \therefore ج_ب = ٠$

$\therefore -\text{ر}_{٢} \times \text{أجـ} - \text{م}\,\text{ر}_{٢} \times \text{بجـ} + \text{و} \times \frac{١}{٢}\text{ل جاهـ} + ٣\text{و} \times \text{س جاهـ} = ٠$

$\therefore -\text{ر}_{٢} \times \text{ل جتاهـ} - \frac{١}{٣}\text{ر}_{٢} \times \text{ل جاهـ} + \text{و} \times \frac{١}{٢}\text{ل جاهـ} + ٣\text{و} \times \text{س جاهـ} = ٠$ بالقسمة على جاهـ

$\therefore -\text{ل ر}_{٢} \times \frac{\text{جتاهـ}}{\text{جاهـ}} - \frac{\text{ل}}{٣}\text{ر}_{٢} + \frac{١}{٢}\text{و ل} + ٣\text{و س} = ٠$

بالتعويض عن $\frac{\text{جتاهـ}}{\text{جاهـ}} = \frac{١١}{٦}$ وبالتعويض من (٣)

$\therefore -\text{ل} \times \frac{٦}{٥}\text{و} \times \frac{١١}{٦} - \frac{\text{ل}}{٣} \times \frac{٦}{٥}\text{و} + \frac{١}{٢}\text{و ل} + ٣\text{و س} = ٠$ بالقسمة على و

$\therefore -\frac{١١}{٥}\text{ل} - \frac{٢}{٥}\text{ل} + \frac{١}{٢}\text{ل} + ٣\text{س} = ٠ \Leftarrow \therefore ٣\text{س} = \frac{١٣}{٥}\text{ل} - \frac{١}{٢}\text{ل}$

$\therefore ٣\text{س} = \frac{٢١}{١٠}\text{ل} \Leftarrow \therefore \text{س} = \frac{٢١}{٣٠}\text{ل} = \frac{٧}{١٠}\text{ل}$

أى أن اقصى مسافة يصعدها الرجل دون أن ينزلق السلم هى $\frac{٧}{١٠}$ طول السلم

<u>ملاحظة هامة:</u>

قبل حل مسائل الإتزان العام يجب أن تكون كل القوى موازية للإتجاه الأفقى و موازية للإتجاه الرأسى حتى يسهل كتابة معادلات الإتزان.
وإذا وجدت قوى ليست موازية للإتجاه الأفقى أو الرأسى يتم تحليل كل قوة الى مركبتين أحدهما فى إتجاه الأفقى والأخرى فى الإتجاه الرأسى.

